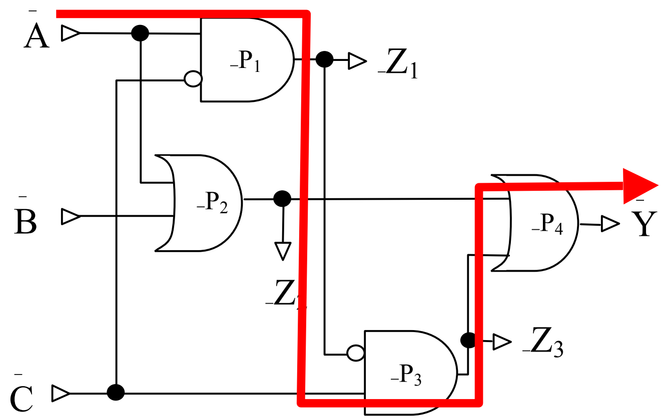
Altri esercizi di sintesi - Soluzioni

1. **Ricavare il cammino critico, la forma tabellare, la prima forma canonica e la forma algebrica del seguente circuito semplificando dove possibile.**



Cammino critico = 3.

A	B	C	~C	Z_1=A~C	Z_2=A+B	~Z1	Z_3=~Z1C	**Y=Z_2+Z_3**
0	0	0	1	0	0	1	0	0
0	0	1	0	0	0	1	1	1
0	1	0	1	0	1	1	0	1
0	1	1	0	0	1	1	1	1
1	0	0	1	1	1	0	0	1
1	0	1	0	0	1	1	1	1
1	1	0	1	1	1	0	0	1
1	1	1	0	0	1	1	1	1

A+B+C

*Implicante **B** Tutte le configurazioni di **A** e **C** per **B=1** sono uguali ad **1***

Nota: *Esaminando la colonna risultato si ricava che la funzione minima è il max-term corrispondente l'unico **0**: **A+B+C.** Analogamente esaminando la sequenza di **1** si possono individuare alcuni implicanti. Ad esempio, è possibile vedere che la funzione ammette l'implicante **B** poiché la funzione data per **B=1** è uguale ad **1** indifferentemente da **A** e **C**. Un Analogo discorso si potrebbe fare per gli implicanti **A** e **C** (vedi mappe di Karnaugh)***.**

Calcoliamo la forma algebrica partendo dal circuito logico:

> **NOTA**: Per ogni passaggio di semplificazione è indicato il punto di lavoro con un evidenziazione gialla e il risultato ottenuto con una zona sottolineata nella riga successiva.

> *Nel ricavare la formula dal circuito logico è comodo ricostruire la formula partendo dalle uscite e risalendo poi il circuito fino agli ingressi.*

Y = ← *Sviluppo la porta P_4*

= (Z_2 + Z_3) ← *Sviluppo le porte P_2 e P_3*

= (A+B + ~Z_1C) ← *Sviluppo le porte P_2 e P_3*

= (A+B + ~(A~C)C) ← *8b De Morgan:* ~(**xy**) = ~**x** + ~**y**

= (A+B + (~A+~ ~C)C) ← *0 Doppia inversione:* ~(~**x**) = **x**

= (A+B + (~A+C)C) ← *7a Distributiva:* (**x**+**y**) **z** = **xz** + **yz**

= (A+B + ~AC+CC) ← *3a Idempotenza:* **xx** = **x**

= (A+B + ~AC+C) ← *6b Assorbimento:* **xy** + **x** = **x**

= (A+B + C) ← *6b Assorbimento:* **xy** + **x** = **x**

Calcoliamo la forma canonica partendo dalla tabella e passando per la forma SOP:

La prima forma canonica si ottiene sommando i mintermini della funzione risultato. Ad ogni combinazione degli ingressi per cui la funzione vale **1** corrisponde un mintermine.

Y = ~A~BC + ~AB~C + ~ABC + A~B~C + A~BC + AB~C + ABC

Semplifichiamo applicando varie volte le regole 7a e 4b:

x y* + ~*x y* = (*x* + ~*x*) *y* = *1 y* = *y

> Questo corrisponde ad individuare di volta in volta degli *implicanti* (**y**) sempre più piccoli della funzione data

Y = ~A~BC + ~AB + A~B + AB

Y = ~A~BC + ~AB + A ← **x** + ~**xy** = **x** + **y**: **x**=*A* , **y**=*B*

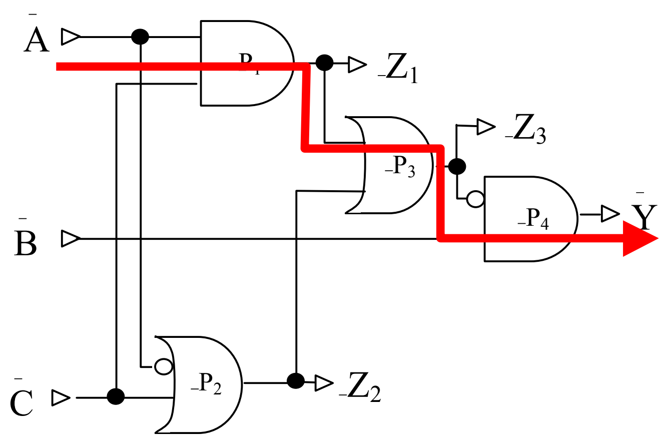
Y = ~A~BC + B + A ← **x** + ~**xy** = **x** + **y**: **x**=*A* , **y**=*(~BC)*

Y = ~BC + B + A ← **x** + ~**xy** = **x** + **y**: **x**=*A* , **y**=*(~BC)*

Y = C + B + A ← **x** + ~**xy** = **x** + **y**: **x**=*A* , **y**=*(~BC)*

Y = A + B + C

2. **Ricavare il cammino critico, la forma tabellare, la prima forma canonica e la forma algebrica del seguente circuito semplificando dove possibile.**



Cammino critico = 3.

A	**B**	**C**	Z_1=AC	~A	Z_2=~A+C	Z_3= Z_1+ Z_2	~Z_3	**Y**=B~Z_3
0	0	0	0	1	1	1	0	0
0	0	1	0	1	1	1	0	0
0	1	0	0	1	1	1	0	0
0	1	1	0	1	1	1	0	0
1	0	0	0	0	0	0	1	0
1	0	1	1	0	1	1	0	0
1	1	0	0	0	0	0	1	1
1	1	1	1	0	1	1	0	0

AB~C

Nota: *Esaminando la colonna risultato si ricava che la funzione minima è il min-term corrispondente l'unico **1**: **AB~C.** In aggiunta si nota pure che la sotto funzione **Z_2** copre totalmente **Z_1** . Per la proprietà di assorbimento, durante la semplificazione, dovrebbe essere possibile semplificarla.*

Calcoliamo la forma algebrica partendo dal circuito logico:

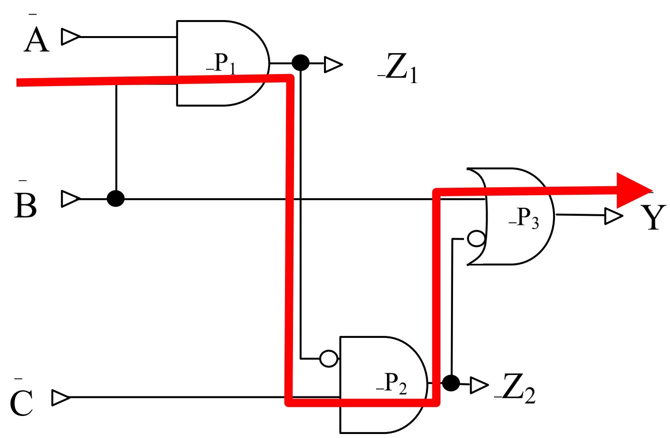
Y =	← *Sviluppo la porta* P_4
= (B ~Z_3)	← *Sviluppo le porte* P_3
= (B ~(Z_1 + Z_2))	← *Sviluppo le porte* P_1 *e* P_2
= B ~(AC + ~A + C)	← *6b Assorbimento:* **xy** + **x** = **x**
= B ~(~A + C)	← *8a De Morgan:* ~(**x** + **y**) = ~**x** ~**y**
= B ~~A ~C	← *0 Doppia inversione:* ~(~**x**) = **x**
= B A ~C	
= AB~C	

Calcoliamo la forma canonica partendo dalla tabella e passando per la forma SOP:

La prima forma canonica si ottiene sommando i mintermini della funzione risultato. Ad ogni combinazione degli ingressi per cui la funzione vale **1** corrisponde un mintermine. In questo caso il calcolo è triviale:

Y = AB~C

3. **Ricavare il cammino critico, la forma tabellare, la prima forma canonica e la forma algebrica del seguente circuito semplificando dove possibile.**



Cammino critico = 3.

A	**B**	**C**	Z_1=AB	$\sim Z_1$	Z_2= $\sim Z_1$ C	$\sim Z_2$	**Y**=B + $\sim Z_2$
0	0	0	0	1	0	1	1
0	0	1	0	1	1	0	0
0	1	0	0	1	0	1	1
0	1	1	0	1	1	0	1
1	0	0	0	1	0	1	1
1	0	1	0	1	1	0	0
1	1	0	1	0	0	1	1
1	1	1	1	0	0	1	1

B + ~C

Nota: *Esaminando la colonna risultato si ricava che la parte superiore è uguale alla parte inferiore: ciò significa che A non determina l'uscita. Esaminando la configurazione di una delle due metà si deduce che la funzione sintetizzata dal circuito è un OR ed in particolare* ***B + ~C.***

Calcoliamo la forma algebrica partendo dal circuito logico:

Y = ← *Sviluppo la porta P_3*

= (B + ~Z_2) ← *Sviluppo le porte P_2*

= (B + ~(~Z_1 C)) ← *Sviluppo le porte P_1*

= (B + ~(~(AB) C)) ← *8a De Morgan:* ~(**x** + **y**) = ~**x** ~**y**

= B + ~((~A +~B) C) ← *7a Distributiva:* (**x**+**y**) **z** = **xz** + **yz**

= B + ~(~AC + ~BC) ← *8a De Morgan:* ~(**x** + **y**) = ~**x** ~**y**

= B + (~(~AC) ~(~BC)) ← *8b De Morgan:* ~(**x y**) = ~**x** + ~**y**

= B + ((~~A+~C) (~~B+~C)) ← *0 Doppia inversione:* ~(~**x**) = **x**

= B + ((A+~C) (B+~C)) ← *7a Distributiva:* (**x**+**y**) **z** = **xz** + **yz**

= B + ((A+~C) B + (A+~C) ~C) ← *7a Distributiva:* (**x**+**y**) **z** = **xz** + **yz**

= B + (AB + ~CB + (A~C +~C ~C) ← *3a Idempotenza:* **xx** = **x**

= B + AB + ~CB + A~C + ~C ← *6b Assorbimento:* **xy** + **x** = **x**

= B + ~C

Calcoliamo la forma canonica partendo dalla tabella e passando per la forma SOP:

La prima forma canonica si ottiene sommando i mintermini della funzione risultato. Ad ogni combinazione degli ingressi per cui la funzione vale **1** corrisponde un mintermine. In questo caso il calcolo è triviale:

Y = ~A~B~C + ~AB~C + ~ABC + A~B~C + AB~C + ABC

Semplifichiamo applicando varie volte le regole 7a e 4b:

x y + ~***x y*** = (***x*** + ~***x***) ***y*** = ***1 y*** = ***y***

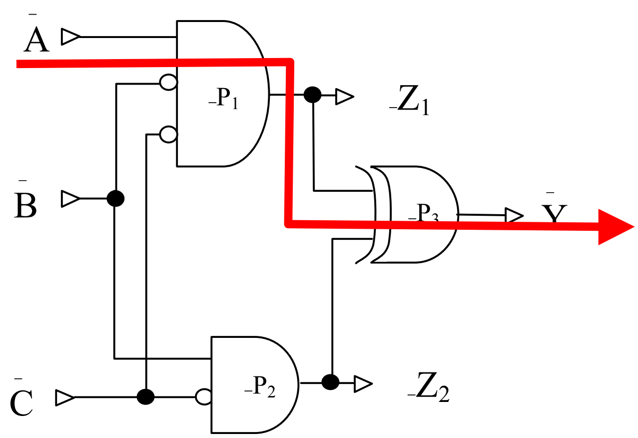
Y = ~B~C + ~AB + AB

Y = ~B~C + B ← **x** + ~**xy** = **x** + **y**: **x**=*A* , **y**=*B*

Y = ~C + B

Y = B + ~C

4. **Ricavare il cammino critico, la forma tabellare, la prima forma canonica e la forma algebrica del seguente circuito semplificando dove possibile.**



Cammino critico = 3 (la porta AND a 3 ingressi richiede due porte a due ingressi in cascata).

Nessuna configurazione 1 XOR 1 : la XOR è equivalente a una porta OR

A	B	C	~B	~C	Z_1= A~B~C	Z_2=B~C	Y=$Z_1 \oplus Z_2$
0	0	0	1	1	0	0	0
0	0	1	1	0	0	0	0
0	1	0	0	1	0	1	1
0	1	1	0	0	0	0	0
1	0	0	1	1	1	0	1
1	0	1	1	0	0	0	0
1	1	0	0	1	0	1	1
1	1	1	0	0	0	0	0

A~B ~C

B ~C

Nota: *Esaminando la colonna risultato si ricava che sono presenti due implicanti:* ***A~B~C*** *e* ***B~C****. In aggiunta si può vedere che la porta XOR non viene sfruttata come XOR da cui può essere sostituita all'occorrenza con una porta OR, senza cambiare la funzione data.*

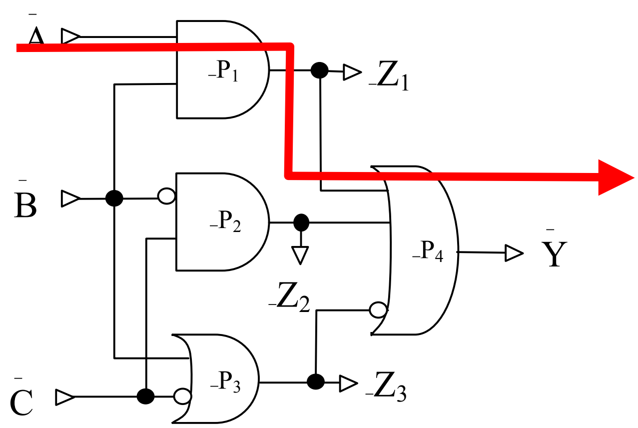
Calcoliamo la forma algebrica partendo dal circuito logico:

$Y =$	$\leftarrow$ *Sviluppo la porta* P_3
$= (Z_1 \oplus Z_2)$	$\leftarrow$ *Sviluppo le porte* P_1 *e* P_2
$= ((A{\sim}B{\sim}C) \oplus (B{\sim}C))$	$\leftarrow$ *Sviluppo la porte XOR*
$= ({\sim}(A{\sim}B{\sim}C)(B{\sim}C) + (A{\sim}B{\sim}C) {\sim}(B{\sim}C))$	$\leftarrow$ *0 Doppia inversione:* ${\sim}({\sim}\mathbf{x}) = \mathbf{x}$
$= ({\sim}A+{\sim}{\sim}B+{\sim}{\sim}C)(B{\sim}C) + (A{\sim}B{\sim}C)({\sim}B+{\sim}{\sim}C)$	
	$\leftarrow$ *8a De Morgan:* ${\sim}(\mathbf{xy})={\sim}\mathbf{x} + {\sim}\mathbf{y}$
$= ({\sim}A+B+C)(B{\sim}C) + (A{\sim}B{\sim}C)({\sim}B+C)$	$\leftarrow$ *7a Distributiva:* $(\mathbf{x}+\mathbf{y})\mathbf{z} = \mathbf{xz}+\mathbf{yz}$
$= {\sim}A(B{\sim}C) + B(B{\sim}C) + C (B{\sim}C) + (A{\sim}B{\sim}C){\sim}B+(A{\sim}B{\sim}C)C$	
	$\leftarrow$ *3a Idempotenza:* $\mathbf{xx} = \mathbf{x}$
$= {\sim}AB{\sim}C + B{\sim}C + CB{\sim}C + A{\sim}B{\sim}C + A{\sim}B{\sim}CC$	
	$\leftarrow$ *4a Inverso:* $\mathbf{xx} = \mathbf{0}$
	$\leftarrow$ *2a Elemento nullo:* $\mathbf{0x} = \mathbf{0}$
$= {\sim}AB{\sim}C + B{\sim}C + A{\sim}B{\sim}C$	$\leftarrow$ *6b Assorbimento:* $\mathbf{xy} + \mathbf{x} = \mathbf{x}$
$= B{\sim}C + A{\sim}B{\sim}C$	$\leftarrow$ *7a Distributiva:* $(\mathbf{x}+\mathbf{y})\mathbf{z}=\mathbf{xz}+\mathbf{yz}$
$= (B + A{\sim}B){\sim}C$	$\leftarrow$ $\mathbf{x} + {\sim}\mathbf{xy} = \mathbf{x} + \mathbf{y}$: $\mathbf{x}=A$, $\mathbf{y}=B$
$= (B + A){\sim}C$	

Calcoliamo la forma canonica partendo dalla tabella e passando per la forma SOP:

$Y = {\sim}AB{\sim}C + A{\sim}B{\sim}C + AB{\sim}C$	$\leftarrow$ *7a Distributiva:* $(\mathbf{x}+\mathbf{y})\mathbf{z}=\mathbf{xz}+\mathbf{yz}$
$Y = ({\sim}AB + A{\sim}B + AB){\sim}C$	$\leftarrow$ *7a Distributiva:* $(\mathbf{x}+\mathbf{y})\mathbf{z}=\mathbf{xz}+\mathbf{yz}$
$Y = ({\sim}AB + A){\sim}C$	$\leftarrow$ $\mathbf{x} + {\sim}\mathbf{xy} = \mathbf{x} + \mathbf{y}$: $\mathbf{x}=A$, $\mathbf{y}=B$
$Y = (A+B)\,{\sim}C$	

5. **Ricavare il cammino critico, la forma tabellare, la prima forma canonica e la forma algebrica del seguente circuito semplificando dove possibile.**



Cammino critico = 4 (la porta OR a 3 ingressi richiede due porte a due ingressi in cascata).

A	**B**	**C**	~B	~C	Z_1= AB	Z_2=~BC	Z_3=B+~C	~Z_3	**Y=** Z_1+ Z_2+ ~Z_3
0	0	0	1	1	0	0	1	0	0
0	0	1	1	0	0	1	0	1	1
0	1	0	0	1	0	0	1	0	0
0	1	1	0	0	0	0	1	0	0
1	0	0	1	1	0	0	1	0	0
1	0	1	1	0	0	1	0	1	1
1	1	0	0	1	1	0	1	0	1
1	1	1	0	0	1	0	1	0	1

~B C

AB

Nota: *Esaminando la colonna risultato si ricava che sono presenti due implicanti:* ***AB*** *e* ***~BC*** .

Calcoliamo la forma algebrica partendo dal circuito logico:

$Y =$	← *Sviluppo la porta P_4*
$= (Z_1 + Z_2 + \sim Z_3)$	← *Sviluppo le porte P_1 e P_2 e P_3*
$= (AB + \sim BC + \sim (B + \sim C))$	← *8a De Morgan:* $\sim(\mathbf{x}+\mathbf{y}) = \sim\mathbf{x}\sim\mathbf{y}$
$= (AB + \sim BC + (\sim B \sim\sim C))$	← *0 Doppia inversione:* $\sim(\sim\mathbf{x}) = \mathbf{x}$
$= AB + \sim BC + \sim BC$	← *3a Idempotenza:* $\mathbf{xx} = \mathbf{x}$
$= AB + \sim BC$	

Calcoliamo la forma canonica partendo dalla tabella e passando per la forma SOP:

$Y = \sim A \sim BC + A \sim BC + AB \sim C + ABC$ ← *7a Distributiva:* $(\mathbf{x}+\mathbf{y})\mathbf{z} = \mathbf{xz}+\mathbf{yz}$

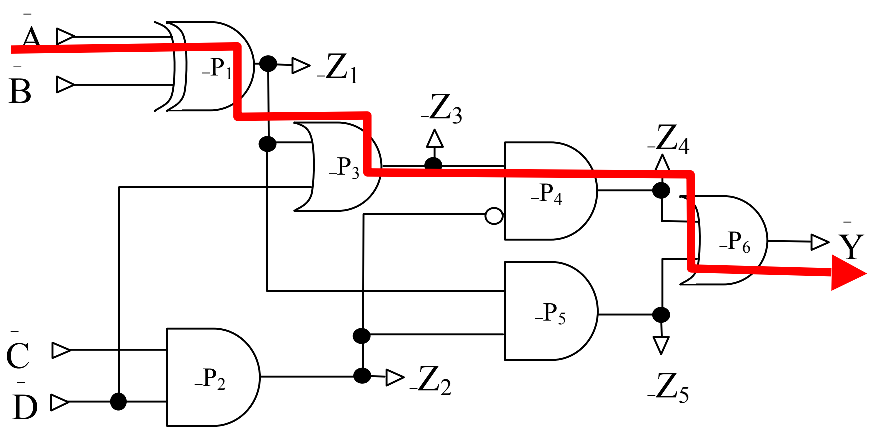
Semplifichiamo applicando varie volte le regole 7a e 4b:

$$\boldsymbol{x\,y + \sim x\,y = (x + \sim x)\,y = 1\,y = y}$$

$Y = \sim BC + AB$

Massimo Marchi – marchi@dsi.unimi.it

6. **Ricavare il cammino critico, la forma tabellare, la prima forma canonica e la forma algebrica del seguente circuito semplificando dove possibile.**



Cammino critico = 4

A	**B**	**C**	**D**	$Z_1= A\oplus B$	$Z_2=CD$	$\sim Z_2$	$Z_3= Z_1+D$	$Z_4=Z_3 \sim Z_2$	$Z_5=Z_1Z_2$	**Y**$= Z_4+Z_5$
0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0
0	0	0	1	0	0	1	1	1	0	1
0	0	1	0	0	0	1	0	0	0	0
0	0	1	1	0	1	0	1	0	0	0
0	1	0	0	1	0	1	1	1	0	1
0	1	0	1	1	0	1	1	1	0	1
0	1	1	0	1	0	1	1	1	0	1
0	1	1	1	1	1	0	1	0	1	1
1	0	0	0	1	0	1	1	1	0	1
1	0	0	1	1	0	1	1	1	0	1
1	0	1	0	1	0	1	1	1	0	1
1	0	1	1	1	1	0	1	0	1	1
1	1	0	0	0	0	1	0	0	0	0
1	1	0	1	0	0	1	1	1	0	1
1	1	1	0	0	0	1	0	0	0	0
1	1	1	1	0	1	0	1	0	0	0

~CD

A⊕ B

Nota: *Esaminando la colonna risultato si ricava che è presente un implicante:* ***~CD****.* *Inoltre la parte centrale della tabellaè la funzione* ***A XOR B.*** *Ne segue che una possibile formula per la tabella data potrebbe essere* ***Y=~CD+(A⊕B)***

Calcoliamo la forma algebrica partendo dal circuito logico:

$Y =$ ← *Sviluppo la porta* P_6

$= (Z_4 + Z_5)$ ← *Sviluppo le porte* P_4 *e* P_5

$= ((Z_3 \sim Z_2) + (Z_1 Z_2))$ ← *Sviluppo le porte* P_1, P_2 *e* P_3

$= (((Z_1 + D) \sim (CD)) + ((A \oplus B)(CD)))$ ← *Sviluppo la porta* P_1

$= ((((A \oplus B)+D) \sim (CD)) + ((A \oplus B)(CD)))$ ←*8a De Morgan:* $\sim(\mathbf{x}+\mathbf{y}) = \sim\mathbf{x}\sim\mathbf{y}$

$= ((((A \oplus B)+D)(\sim C + \sim D)) + (A \oplus B)CD)$ ←*7a Distributiva:* $(\mathbf{x}+\mathbf{y})\mathbf{z} = \mathbf{xz}+\mathbf{yz}$

$= ((A \oplus B)+D)\sim C + ((A \oplus B)+D)\sim D + (A \oplus B)CD$ ←*7a Distributiva:* $(\mathbf{x}+\mathbf{y})\mathbf{z} = \mathbf{xz}+\mathbf{yz}$

$= (A \oplus B)\sim C + D\sim C + (A \oplus B)\sim D + D\sim D + (A \oplus B)CD$

←*4a Inverso:* $\mathbf{xx} = \mathbf{0}$

$= (A \oplus B)\sim C + \sim CD + (A \oplus B)\sim D + (A \oplus B)CD$ ←*7a Distributiva:* $(\mathbf{x}+\mathbf{y})\mathbf{z} = \mathbf{xz}+\mathbf{yz}$

$= (A \oplus B)(\sim C + \sim D + CD) + \sim CD$ ← $\mathbf{x} + \sim\mathbf{xy} = \mathbf{x} + \mathbf{y}$: $\mathbf{x} = \sim D$, $\mathbf{y} = C$

$= (A \oplus B)(\sim C + \sim D + C) + \sim CD$ ←*4b Inverso:* $\mathbf{x} + \sim\mathbf{x} = \mathbf{1}$

$= (A \oplus B)(1 + \sim D) + \sim CD$ ←*2b Elemento nullo:* $\mathbf{1} + \mathbf{x} = \mathbf{1}$

$= (A \oplus B) + \sim CD$

Calcoliamo la forma canonica partendo dalla tabella e passando per la forma SOP:

$Y = \sim A\sim B\sim CD + \sim AB\sim C\sim D + \sim AB\sim CD + \sim ABC\sim D + \sim ABCD + A\sim B\sim C\sim D + A\sim B\sim CD + A\sim BC\sim D + A\sim BCD + AB\sim CD$ ← *3a Idempotenza:* $\mathbf{xx} = \mathbf{x}$

$= \sim A\sim B\sim CD + \sim AB\sim C\sim D + \sim AB\sim CD + \sim AB\sim CD + \sim ABC\sim D + \sim ABCD + A\sim B\sim C\sim D + A\sim B\sim CD + A\sim B\sim CD + A\sim BC\sim D + A\sim BCD + AB\sim CD$

Semplifichiamo applicando varie volte le regole 7a e 4b:

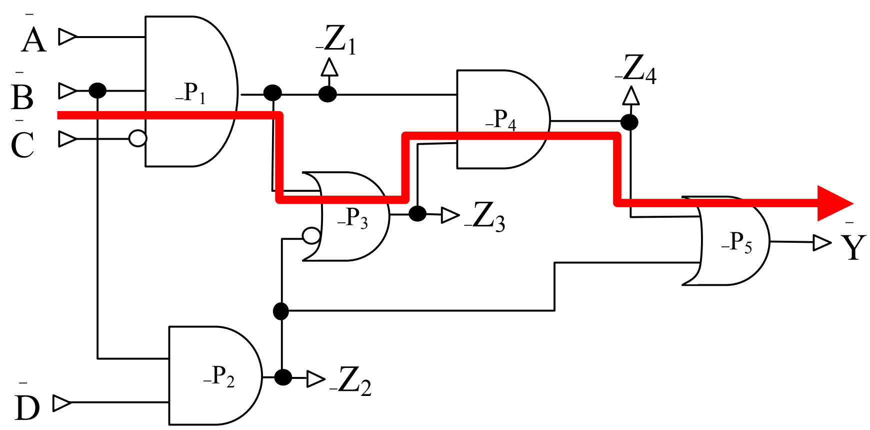
$$x\,y + \sim x\,y = (x + \sim x)\,y = 1\,y = y$$

$= \sim A\sim B\sim CD + \sim AB\sim C\sim D + \sim AB\sim CD + \sim AB\sim CD + \sim ABC\sim D + \sim ABCD$
$+ A\sim B\sim C\sim D + A\sim B\sim CD + A\sim B\sim CD + A\sim BC\sim D + A\sim BCD + AB\sim CD$

$= \sim CD + \sim AB + A\sim B$

$= \sim CD + (A \oplus B)$

7. **Ricavare il cammino critico, la forma tabellare, la prima forma canonica e la forma algebrica del seguente circuito semplificando dove possibile.**



Cammino critico = 5 (la porta AND a 3 ingressi richiede due porte a due ingressi in cascata)

A	B	C	D	~C	Z_1= AB~C	Z_2=BD	~Z_2	Z_3= Z_1+~Z_2	Z_4=Z_1 Z_2	Y=Z_4+Z_2	
0	0	0	0	1	0	0	1	1	0	0	
0	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	
0	0	1	0	0	0	0	1	1	0	0	
0	0	1	1	0	0	0	1	1	0	0	
0	1	0	0	1	0	0	1	1	0	0	
0	1	0	1	1	0	1	0	0	0	1	***B~CD***
0	1	1	0	0	0	0	1	1	0	0	
0	1	1	1	0	0	1	0	0	0	1	***BCD***
1	0	0	0	1	0	0	1	1	0	0	
1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	
1	0	1	0	0	0	0	1	1	0	0	
1	0	1	1	0	0	0	1	1	0	0	***AB~C***
1	1	0	0	1	1	0	1	1	1	1	
1	1	0	1	1	1	1	0	1	1	1	
1	1	1	0	0	0	0	1	1	0	0	
1	1	1	1	0	0	1	0	0	0	1	

Nota: *Esaminando la colonna risultato si ricava che sono presenti gli implicanti:* ***B~CD, BCD e AB~C****. Inoltre Z_4 replica Z_1 quindi tutta la circuiteria di Z_4 può essere semplificata. Una possibile formula per la tabella data potrebbe essere:*

Y= B~CD + BCD + AB~C = BD + AB~C

Calcoliamo la forma algebrica partendo dal circuito logico:

Y = ← *Sviluppo la porta P_5*

= (Z_4 + Z_2) ← *Sviluppo le porte P_4 e P_2*

= ((Z_1 Z_3) + (BD)) ← *Sviluppo le porte P_1 e P_3*

= (((AB~C) (Z_1+ ~Z_2)) + (BD)) ← *Sviluppo la porta P_1 e P_2*

= ((AB~C) (AB~C + ~(BD))) + BD ←*8a De Morgan:* **~(x+y)=~x~y**

= ((AB~C) (AB~C + ~B + ~D)) + BD ←*7a Distributiva:* **(x+y)z=xz+yz**

= (AB~C) (AB~C) + (AB~C)~B + (AB~C)~D + BD

←*3a Idempotenza:* **xx** = **x**

= AB~C + (AB~C)~B + (AB~C)~D + BD ←*6b Assorbimento:* **xy** + **x** = **x**

= AB~C + (AB~C)~D + BD ←*6b Assorbimento:* **xy** + **x** = **x**

= AB~C + BD ←*7a Distributiva:* **(x+y)z=xz+yz**

= B(A~C + D)

Calcoliamo la forma canonica partendo dalla tabella e passando per la forma SOP:

Y = ~AB~CD + ~ABCD + AB~C~D +AB~CD +ABCD

← *3a Idempotenza:* **xx** = **x**

= ~AB~CD + ~ABCD + AB~C~D + AB~CD + AB~CD + ABCD

Semplifichiamo applicando varie volte le regole 7a e 4b:

x y* + ~*x y* = (*x* + ~*x*) *y* = *1 y* = *y

= B~CD + BCD + AB~C

= BD + AB~C

8. Calcolare una forma algebrica semplificata della seguente tabella:

A	B	C	D	Y
0	0	0	0	1
0	0	0	1	0
0	0	1	0	0
0	0	1	1	1
0	1	0	0	0
0	1	0	1	0
0	1	1	0	1
0	1	1	1	0
1	0	0	0	0
1	0	0	1	1
1	0	1	0	0
1	0	1	1	0
1	1	0	0	1
1	1	0	1	0
1	1	1	0	0
1	1	1	1	1

La forma SOP è composta da 6 min-termini sintetizzabili con 3 porte AND a due ingressi per ogni min-termine e 5 porte OR a due ingressi per le somme, per un totale di 3*6+5=23 porte logiche.

Dividiamo la tabella in quattro quadranti di quattro righe ognuno. Si può notare che il primo e l'ultimo quadrante la funzione hanno valori di verità uguali alla funzione:

(C xor ~D)

In questi quadranti la funzione (A xor ~B) vale **1** quindi gli **1** di questi quadranti possono essere coperti dalla funzione:

(A xor ~B) (C xor ~D)

Nel secondo e terzo quadrante la tabella di verità assomiglia alla tabella di verità della funzione **CD** a meno della posizione. Sempre in questi quadranti la funzione

~(A xor ~B)

vale 1, quindi gli **1** della funzione originaria nel secondo e terzo quadrante possono essere coperti dalla funzione>

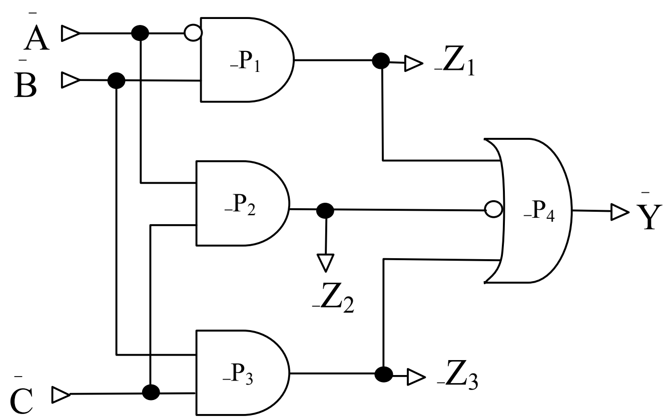
~(A xor ~B) (A xor C) (~A xor D)

Unendo i risultati:

(C xor ~D)(A xor ~B)+ ~(A xor ~B) (A xor C) (~A xor D)

che può essere costruita con 8 porte (3 porte AND,1 porta OR, 4 porte XOR, una porta xor è usata due volte).

9. **Ricavare la forma tabellare , la prima forma canonica e la forma algebrica del seguente circuito semplificando dove possibile.**



A	B	C	~A	Z_1=~AB	Z_2=AC	Z_3=BC	~Z_2	Y=Z_1+~Z_2+Z_3
0	0	0	1	0	0	0	1	1
0	0	1	1	0	0	0	1	1
0	1	0	1	1	0	0	1	1
0	1	1	1	1	0	1	1	1
1	0	0	0	0	0	0	1	1
1	0	1	0	0	1	0	0	0
1	1	0	0	0	0	0	1	1
1	1	1	0	0	1	1	0	1

Calcoliamo una forma algebrica semplificata partendo dal circuito logico:

NOTA: Per ogni passaggio di semplificazione è indicato il punto di lavoro con un evidenziazione gialla e il risultato ottenuto con una <u>zona sottolineata</u> nella riga successiva.

Y = ← *Sviluppo la porta P_4*

= (Z_1 + ~Z_2 + Z_3) ← *Sviluppo le porte P_1, P_2 e P_3*

= (<u>~AB</u> + <u>~(AC)</u> + <u>BC</u>) ← *9a De Morgan:* ~(**xy**) = ~**x** + ~**y**

= (~AB + <u>~A + ~C</u> + BC) ← *8b Assorbimento:* **xy** + **x**= ~**x** *(**x**=~A,**y**=B)*

= (<u>~A</u> + ~C + BC)

Vale la seguente proprietà: **x + ~xy = x + y**

Questo *non è altro che l'unico maxtermine della seconda forma canonica.*

Dim:	**x** + ~**xy**	= (**x** + **xy**) + ~**xy**	←*8b*
		= ***x*** + (***xy*** + ~***xy***)	←*6b*
		= ***x*** + ***y(x*** + ~***x)***	←*7a*
		= ***x*** + ***y1***	←*4b*
		= ***x*** + ***y***	←*1a*

= (~A + ~C + BC) ← *Applico:* **x + ~xy = x + y**

= (~A + ~C + B) ← *8b De Morgan*

= ~ (A~BC)

Questo non è altro che l'unico mintermine della prima forma canonica della funzione ottenuta negando quella data.

Calcoliamo lo stesso risultato partendo dalla tabella la forma SOP e semplificando:

La prima forma canonica si ottiene sommando i mintermini della funzione risultato. Ad ogni combinazione degli ingressi per cui la funzione vale 1 corrisponde un mintermine.

Y = ~A~B~C + ~A~BC + ~AB~C + ~ABC + A~B~C + AB~C + ABC

Semplifichiamo applicando varie volte le regole 7a e 4b:

Questo corrisponde ad individuare di volta in volta degli *implicanti* (**y**) sempre più piccoli della funzione data

x y* + ~*x y* = (*x* + ~*x*) *y* = *1 y* = *y

Y = ~A~B~C + ~A~BC + ~AB~C + ~ABC + A~B~C + AB~C + ABC

Y = ~A~B + ~AB~C + ~ABC + A~B~C + AB~C + ABC

Y = ~A~B + ~AB + A~B~C + AB~C + ABC

Y = ~A~B + ~AB + A~C + ABC

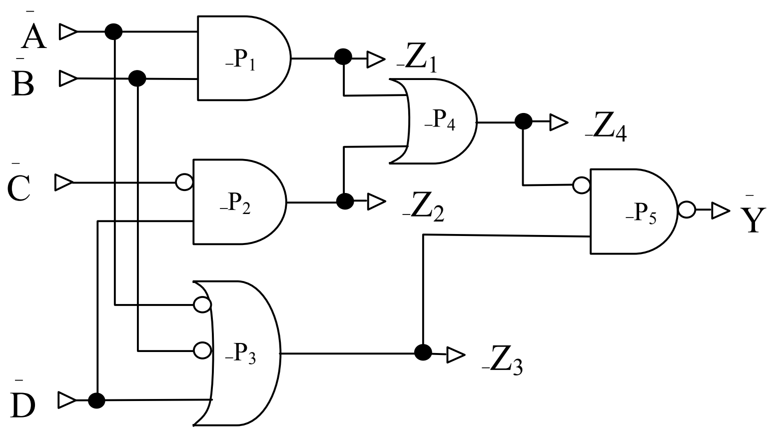
Y = ~A + A~C + ABC ← *6b Associativa:* **A(w)+A(z) = A[(w) +(z)]**

Y = ~A + A(~C + BC) ← **x + ~xy = x + y***:* **x**=*~C* , *~***x**=*~(~C)=C*

Y = ~A + A(~C + B) ← **x + ~xy = x + y***:* **x**=*~A* , **y**=*(~C+B)*

Y = ~A + ~C + B = ~(A~BC) ← *Vedi sopra*

10. **Ricavare la forma tabellare , la prima forma canonica e la forma algebrica del seguente circuito semplificando dove possibile.**



Forma tabellare:

A	**B**	**C**	**D**	~A	~B	~C	Z_1= AB	Z_2=~CD	Z_3=~A~BD	Z_4= Z_1+ Z_2	~Z_4	Z_3~Z_4	**Y**
0	0	0	0	1	1	1	0	0	1	0	1	1	0
0	0	0	1	1	1	1	0	1	1	1	0	0	1
0	0	1	0	1	1	0	0	0	1	0	1	1	0
0	0	1	1	1	1	0	0	0	1	0	1	1	0
0	1	0	0	1	0	1	0	0	1	0	1	1	0
0	1	0	1	1	0	1	0	1	1	1	0	0	1
0	1	1	0	1	0	0	0	0	1	0	1	1	0
0	1	1	1	1	0	0	0	0	1	0	1	1	0
1	0	0	0	0	1	1	0	0	1	0	1	1	0
1	0	0	1	0	1	1	0	1	1	1	0	0	1
1	0	1	0	0	1	0	0	0	1	0	1	1	0
1	0	1	1	0	1	0	0	0	1	0	1	1	0
1	1	0	0	0	0	1	1	0	0	1	0	0	1
1	1	0	1	0	0	1	1	1	1	1	0	0	1
1	1	1	0	0	0	0	1	0	0	1	0	0	1
1	1	1	1	0	0	0	1	0	1	1	0	0	1

Nota: dalla tabella si possono ricavare suggerimenti sul come semplificare la formula data.
Ex: il gruppo di **1** *corrispondenti alle configurazioni per cui A e B valgono* **1** *suggerisce di cercare di derivare l'implicante* **AB** *durante la semplificazione della SOP.*

Stesso discorso vale per gli **1** *presenti quando* **CD = 01** *che suggerisce di cercare di derivare l'implicante* **~CD.**

Massimo Marchi – marchi@dsi.unimi.it

Calcoliamo la forma algebrica partendo dal circuito logico:

$$Y = \overline{(\overline{Z_4} + Z_3)} = \overline{(\overline{Z_1 + Z_2})\ (\overline{A}+\overline{B}+D)} \qquad \leftarrow \textit{Sviluppo le porte del circuito}$$

Quando compaiono diversi livelli di negazione conviene applicare ripetutamente Demorgan e Doppia Negazione

$$= \overline{\overline{(AB + \overline{C}D)}\ (\overline{A}+\overline{B}+D)} \qquad \leftarrow 9a \quad \textit{De Morgan}$$

$$= \overline{\overline{(AB + \overline{C}D)}} + \overline{(\overline{A}+\overline{B}+D)} \qquad \leftarrow 0 \quad \textit{Doppia Negazione}$$

$$= (AB + \overline{C}D) + \overline{(\overline{A}+\overline{B}+D)} \qquad \leftarrow 9b \quad \textit{De Morgan}$$

$$= (AB + \overline{C}D) + (\ \overline{(\overline{A}+\overline{B})}\ \overline{D})\ ) \qquad \leftarrow 9b \quad \textit{De Morgan}$$

$$= (AB + \overline{C}D) + (\overline{\overline{A}}\ \overline{\overline{B}}\ \overline{D}) \qquad \leftarrow 0 \quad \textit{Doppia Negazione}$$

$$= (AB + \overline{C}D + (AB\overline{D}) \qquad \leftarrow 5b \quad \textit{Commutativa}$$

$$= AB + AB\overline{D} + \overline{C}D \qquad \leftarrow 8b \quad \textit{Assorbimento}$$

$$= \mathbf{AB + \overline{C}D}$$

Nota: Questa è la somma dei due implicanti indviduati in tabella!!! Ci sono solo loro perché insieme coprono tutti gli **1** *della tabella (vedi mappe di karnaugh)*

Calcoliamo la forma canonica partendo dalla tabella e semplifichiamo:

Y = ~A~B~CD + ~AB~CD + A~B~CD + AB~C~D + AB~CD + ABC~D + ABCD

Semplifichiamo applicando varie volte: ***x y* + ~*x y* = *y***

Y = ~A~B~CD + ~AB~CD + A~B~CD + AB~C~D + AB~CD + ABC~D + ABCD

= ~A~B~CD + ~AB~CD + A~B~CD + AB~C~D + AB~CD + ABC

= ~A~B~CD + ~AB~CD + A~B~CD + AB~C + ABC

= ~A~B~CD + ~AB~CD + A~B~CD + AB

= ~B~CD + ~AB~CD + AB

Nello sviluppo e semplificazione tramite le SOP conviene come primo passaggio individuare degli implicanti della funzione data. Questo si può ottenere individuando iterativamente coppie di termini uguali eccetto che per un letterale che compare sia negato che non negato.

Applico sul termine **AB** la regola di 8b, ***x* = *x* + *x y*,**
in modo da creare un termine **AB~CD** da utilizzare nella semplificazione successiva:

= ~B~CD + ~AB~CD + AB

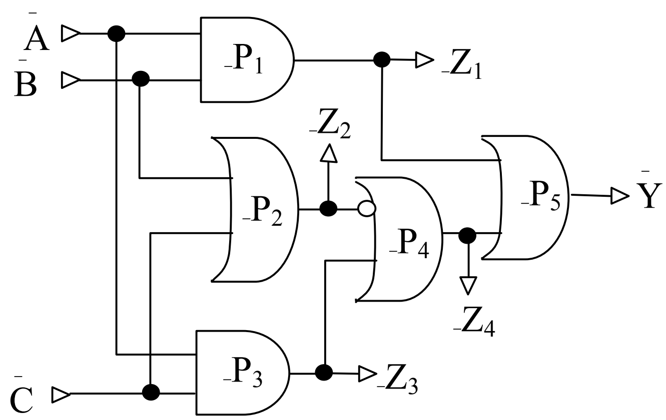
= ~B~CD + ~AB~CD + AB + AB~CD ← 7a e 4b: ***x y* + ~*x y* = *y***

= ~B~CD + B~CD + AB ← idem

= ~CD + AB ← *5b Commutativa*

= **AB + ~CD**

11. **Ricavare la forma tabellare , la prima forma canonica e la forma algebrica del seguente circuito semplificando dove possibile.**



A	B	C	Z_1=AB	Z_2=B+C	Z_3=AC	$\sim Z_2$	$Z_4=\sim Z_2+Z_3$	**Y**=Z_1+Z_4
0	0	0	0	0	0	1	1	1
0	0	1	0	1	0	0	0	0
0	1	0	0	1	0	0	0	0
0	1	1	0	1	0	0	0	0
1	0	0	0	0	0	1	1	1
1	0	1	0	1	1	0	1	1
1	1	0	1	1	0	0	0	1
1	1	1	1	1	1	0	1	1

Calcoliamo la forma algebrica partendo dal circuito logico:

Y = ← *Sviluppo la porta P_5*

= (Z_1+Z_4) ← *Sviluppo le porte P_1 e P_4*

= (AB) + ($\sim Z_2+Z_3$) ← *Sviluppo le porte P_2 e P_3*

= AB + ~(B+C) + (AC) ← *5b Commutativa:* **x + y = y + x**

= AB + (AC) + ~(B+C) ← *7a Distributiva* **zx + zy = z(x + y)**

= A(B +C) + ~(B+C) ← *vedi sopra:* **x + ~xy = x + y *(* x=**~*(B+C),* y=*A)*

= A + ~(B+C) ←*9bDe Morgan* **~(x + y)** = **~x~y**

= A + ~B~C

Questi sono i due *mintermini della prima forma canonica della funzione ottenuta.*

Calcoliamo la forma canonica SOP partendo dalla tabella e semplifichiamo:

La prima forma canonica si ottiene sommando i mintermini della funzione risultato. Ad ogni combinazione degli ingressi per cui la funzione vale 1 corrisponde un mintermine.

Y = ~A~B~C + A~B~C + AB~C + A~BC + ABC

Questo corrisponde ad individuare di volta in volta degli *implicanti* (**y**) sempre più piccoli della funzione data

Semplifichiamo applicando varie volte le regole 7a e 4b:

x y* + ~*x y* = (*x* + ~*x*) *y* = *1 y* = *y

Y = ~A~B~C + A~B~C + AB~C + A~BC + ABC

= ~A~B~C + A~C + AC

= ~A~B~C + A

= ~A~B~C + A~B ~C + A

= ~B ~C + A

Calcoliamo la seconda forma canonica POS partendo dal risultato precendente:

Y = A + ~B~C

= A+A(~B +B)+A~C+~B~C

= A+A~B +AB+A~C+~B~C

= AA+A~B +BA+B~B +~CA+~C ~B

= A (A+~B) +B (A+~B) +~C(A+~B)

= (A+B+~C) (A+~B)

= (A+B+~C) (A+~B+C) (A+~B+~C)

12. Si dimostri che (A + ~B)(B + C) = AB + AC + ~BC.

(A + ~B)(B + C)	=	(A + ~B) B + (A + ~B) C	;applico distributiva
	=	AB + ~BB + AC + ~BC	
	=	AB + 0 + AC + ~BC	;inverso
	=	AB + AC + ~BC	;associativa ed identità

13. Si dimostri che x + ~xy = *x* + *y*.

x + ~xy	=	x + xy + ~xy	;assorbimento
	=	x + (x + ~x) y	;distributiva
	=	x + 1 y	;inverso
	=	x + y	;identita

14. Sia Y=A(A + ~B)(B + C) + ~BD una funzione logica. Si ricavi la SOP. Si proceda poi alla semplificazione algebrica della Y.

La forma SOP si ottiene esprimendo la funzione data tramite min-termini, cioè termini in cui compaioni tutti i letterali della funzione una sola volta congiunti dall'operatore AND ed eventualmente negati. Per ottenere questo occorre eliminare le parentesizzazioni e sviluppare i termini a cui mancano alcuni letterali:

$$
\begin{aligned}
Y &= A(A + \sim B)(B + C) + \sim BD \\
&= (AA + A\sim B)(B+C) + \sim BD && \text{;distributiva} \\
&= AAB + AAC + A\sim BB + A\sim BC + \sim BD \\
&= AB + AC + A0 + A\sim BC + \sim BD && \text{;idempotenza,inverso} \\
&= AB + AC + 0 + A\sim BC + \sim BD && \text{;elemento nullo} \\
&= AB + AC + A\sim BC + \sim BD && \text{;iassociativa,identità}
\end{aligned}
$$

Completo i mintermini:

$$
\begin{aligned}
&= AB + AC + A\sim BC + \sim BD \\
&= AB1 + AC1 + A\sim BC1 + \sim BD1 \\
&= AB(C+\sim C) + AC(B+\sim B) + A\sim BC\,(D+\sim D) + \sim BD(A+\sim A) \\
&= ABC1 + AB\sim C1 + ACB1 + AC\sim B1 + A\sim BCD + A\sim BC\sim D + \sim BDA1 \\
&\quad + \sim BD\sim A1 \\
&= ABC(D+\sim D) + AB\sim C(D+\sim D) + ACB(D+\sim D) + AC\sim B(D+\sim D) \\
&\quad + A\sim BCD + A\sim BC\sim D + \sim BDA(C+\sim C) + \sim BD\sim A(C+\sim C) \\
&= ABCD + ABC\sim D + AB\sim CD + AB\sim C\sim D + ACBD + ACB\sim D \\
&\quad + AC\sim BD + AC\sim B\sim D + A\sim BCD + A\sim BC\sim D + \sim BDAC + \sim BDA\sim C \\
&\quad + \sim BD\sim AC + \sim BD\sim A\sim C \\
&= ABCD + ABC\sim D + AB\sim CD + AB\sim C\sim D + ABCD + ABC\sim D \\
&\quad + A\sim BCD + A\sim BC\sim D + A\sim BCD + A\sim BC\sim D + A\sim BCD + A\sim B\sim CD \\
&\quad + \sim A\sim BCD + \sim A\sim B\sim CD
\end{aligned}
$$

Ordino i termini secondo il loro ordine di min-termine per rendere più facile l'eliminazione dei termini ridondanti applicando x+x=x:

$$
\begin{aligned}
&= \sim A\sim B\sim CD_{(1)} + \sim A\sim BCD_{(3)} + A\sim B\sim CD_{(9)} + A\sim BC\sim D_{(10)} \\
&\quad + \cancel{A\sim BC\sim D}_{(10)} + A\sim BCD_{(11)} + \cancel{A\sim BCD}_{(11)} \cancel{+ A\sim BCD}_{(11)} \\
&\quad + AB\sim C\sim D_{(12)} + AB\sim CD_{(13)} + ABC\sim D_{(14)} + \cancel{ABC\sim D}_{(14)} \\
&\quad + ABCD_{(15)} + \cancel{ABCD}_{(15)} \\
&= \sim A\sim B\sim CD_{(1)} + \sim A\sim BCD_{(3)} + A\sim B\sim CD_{(9)} + A\sim BC\sim D_{(10)} \\
&\quad + A\sim BCD_{(11)} + AB\sim C\sim D_{(12)} + AB\sim CD_{(13)} + ABC\sim D_{(14)} + ABCD_{(15)}
\end{aligned}
$$

$Y = \sim A \sim B \sim CD_{(1)} + \sim A \sim BCD_{(3)} + A \sim B \sim CD_{(9)} + A \sim BC \sim D_{(10)}$
$+ A \sim BCD_{(11)} + AB \sim C \sim D_{(12)} + AB \sim CD_{(13)} + ABC \sim D_{(14)} + ABCD_{(15)}$

Da questa forma SOP possiamo ricavare la tabella di verità in maniera agevole considerando le configurazioni identificate dai min-termini:

A	B	C	D	Y	Min-termini
0	0	0	0	0	
0	0	0	1	1	$\sim A \sim B \sim CD = m_1$
0	0	1	0	0	
0	0	1	1	0	$\sim A \sim BCD = m_3$
0	1	0	0	0	
0	1	0	1	0	
0	1	1	0	0	
0	1	1	1	0	
1	0	0	0	0	
1	0	0	1	1	$A \sim B \sim CD = m_9$
1	0	1	0	1	$A \sim BC \sim D = m_{10}$
1	0	1	1	1	$A \sim BCD = m_{11}$
1	1	0	0	1	$AB \sim C \sim D = m_{12}$
1	1	0	1	1	$AB \sim CD = m_{13}$
1	1	1	0	1	$ABC \sim D = m_{14}$
1	1	1	1	1	$ABCD = m_{15}$

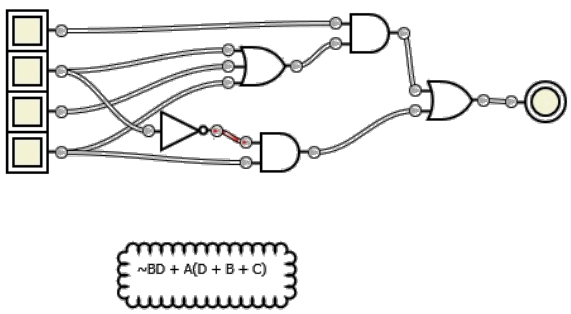
Semplifichiamo partendo dalla SOP:

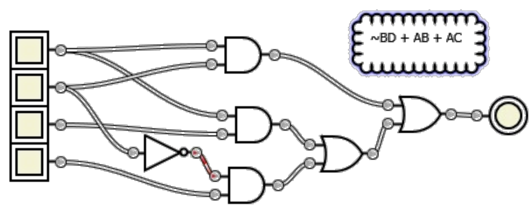
= ~A~B~CD + ~A~BCD + A~B~CD + A~BC~D + A~BCD + AB~C~D
+ AB~CD + ABC~D + ABCD
= (~C+C)~A~BD + A~B~CD + A~BC(~D+D) + AB~C(~D+D) + ABC(~D+D)
= 1~A~BD + A~B~CD + A~BC1 + AB~C1 + ABC1
= ~A~BD + A~B~CD + A~BC + AB~C + ABC
= ~A~BD + A~B~CD + A~BC + AB~C + BC)
= ~A~BD + A~B~CD + A(~BC + B~C + BC)
= ~A~BD + A~B~CD + A(B+C)
= ~A~BD + A~B~CD + AB + AC
= ~A~BD + A~B~CD + AB + AC + AC
= ~A~BD + A~B~CD + AB + A~BCD + AC
= ~A~BD + A~BD(~C+C) + AB + AC
= ~A~BD + A~BD1 + AB + AC
= (~A+A)~BD + AB + AC
= ~BD + AB + AC

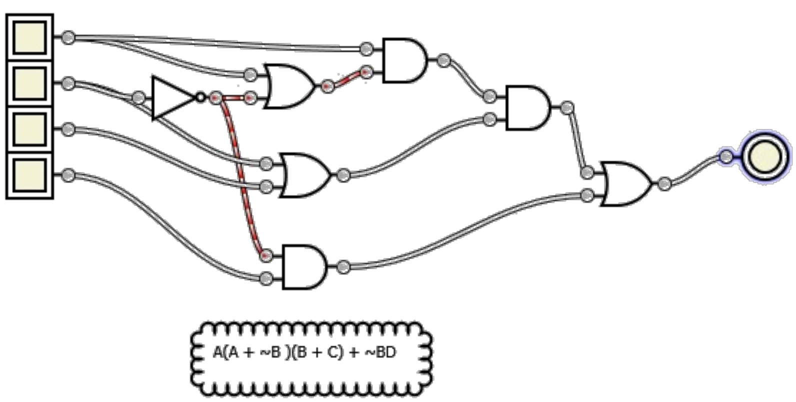
Si può notare che la parte bassa della tabella corrisponde alla funzione A(B+C+D); proviamo a mettterla in evidenza nella formula:

= ~BD + A~C~BD +AB + AC
= ~BD + A(~C~BD + B + C)
= ~BD + A(~C~BD + B~CD + B + CD + C)
= ~BD + A(~CD (~B+B) + B + CD + C)
= ~BD + A(~CD + B + CD + C)
= ~BD + A((~C+C)D + B + C)
= ~BD + A(D + B + C)

Realizziamo questi circuiti in Gatesim:







15. Data la tabella:

A	B	C	X	Y
0	0	0	0	0
0	0	1	0	1
0	1	0	0	1
0	1	1	1	0
1	0	0	0	1
1	0	1	1	0
1	1	0	1	0
1	1	1	1	1

Si ricavi la SOP delle due funzioni X e Y e si proceda alla semplificazione

Estraggo i min-termini ricavandoli dalla tabella e semplico:

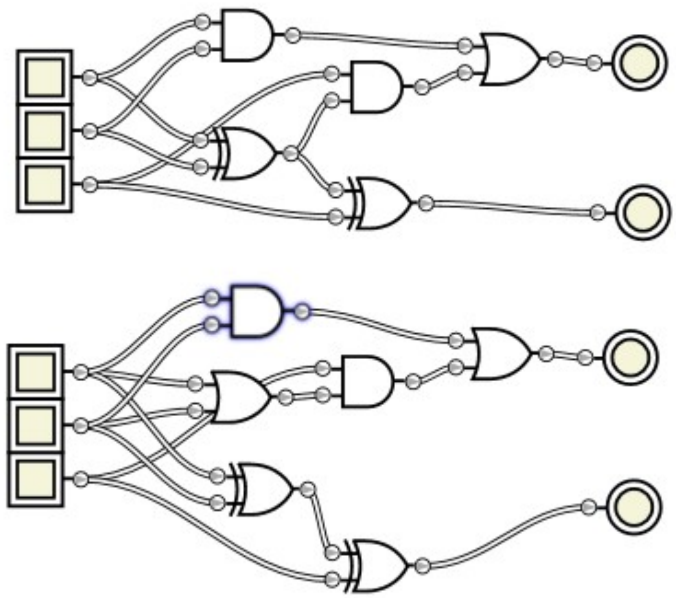
X = ~ABC + A~BC + AB~C + ABC
= ~ABC + A~BC + AB~C + AB~C + ABC
= (~AB + A~B + AB)C + AB(~C + C)
= (A + B)C + AB(~C + C)
= (A + B)C + AB

Y = ~A~BC + ~AB~C + A~B~C + ABC
= ~A(~BC + B~C) + A(~B~C + BC)
= ~A(B ⊕ C) + A (~~(~B~C + BC))
= ~A(B ⊕ C) + A ~{~[~B~C)][~(BC)]}
= ~A(B ⊕ C) + A ~{([~~B]+[~~C])[(~B)+(~C)]}
= ~A(B ⊕ C) + A ~{(B+C)[~B+~C]}
= ~A(B ⊕ C) + A ~{(B~B + B~C + C~B + C~C]}
= ~A(B ⊕ C) + A ~{0 +B~C + C~B +0}
= ~A(B ⊕ C) + A ~{B~C + C~B}
= ~A(B ⊕ C) + A ~(B ⊕ C)
= A ⊕ (B ⊕ C)
= (A ⊕ B) ⊕ C

Se deriviamo diversamente X possiamo ri-usare due volte la porta A XOR B per codificare contemporaneamente le due funzioni:

X = ~ABC + A~BC + AB~C + ABC
= (~AB + A~B)C + AB(~C + C)
= (A ⊕ B)C + AB(~C + C)
= (A ⊕ B) C + AB

Realizziamo i due circuiti in Gatesim:



Il primo circuito a cammino critico pari a 3 e complessità pari a 5. Il secondo cammino critico 3 e complessità 6. Da un ispezione della tabella di verità si può notare che i due circuiti realizzano entrambi un sommatore Full-Adder.